

مهندسی نغمه‌ها

تحلیل نسبت‌های ریاضی در فواصل موسیقیایی ویولن

پژوهشگر: سهند صناعی

پایه تحصیلی: هفتم

دبیر راهنما: جناب آقای فردین شنبیدی

مشاوره و استاد: دکتر فرهاد جوکار - مدرس ویولن

مدرس دانشگاه شیراز

سال تحصیلی: ۱۴۰۴-۱۴۰۵

تقدیم به همه کسانی که موسیقی را با زبان ریاضی می‌شنوند

فهرست مطالب:

عنوان	صفحه
-----	-----
صفحه عنوان	۱
فهرست مطالب	۲
سپاسگزاری	۳
چکیده	۴
فصل اول: مقدمه	۵
فصل دوم: بیان مسئله و فرضیه‌ها	۶
فصل سوم: مبانی نظری (ارتباط با ریاضی هفتم)	۷
فصل چهارم: روش تحقیق	۹
فصل پنجم: یافته‌ها و داده‌ها	۱۰
فصل ششم: تجزیه و تحلیل داده‌ها	۱۲
فصل هفتم: نتیجه‌گیری	۱۴
فصل هشتم: پیشنهادها	۱۵
فصل نهم: منابع	۱۶
پیوست: تصاویر آزمایش	۱۷

سپاسگزاری

سپاس خداوند را که به ما توانایی اندیشیدن و کشف زیبایی‌های جهان را عطا فرمود.

از پدر و مادر عزیزم که همیشه مرا در مسیر یادگیری همراهی کردند، تشکر می‌کنم.

از استاد گرامی، جناب آقای فردین شنبیدی، دبیر ریاضی، که با راهنمایی‌های ارزشمند خود مرا در انجام این پژوهش یاری دادند،
قدردانی می‌نمایم.

همچنین از استاد گرانقدرم، دکتر فرهاد جوکار مدرس ویولن، پژوهشگر و مدرس دانشگاه شیراز

چکیده

در این پژوهش، به دنبال کشف رابطه بین ریاضیات و موسیقی، به ویژه در ساز ویولن بوده‌ام. ویولن برخلاف بسیاری از سازها، پرده‌بندی ندارد و نوازنده باید بدون هیچ علامت راهنمایی، انگشتان خود را در جای دقیق نت‌ها قرار دهد. این سوال برایم مطرح شد که آیا قانون ریاضی پشت این جای‌گذاری‌ها وجود دارد؟

با استفاده از مفاهیم ****نسبت و تناسب**** که در کتاب ریاضی پایه هفتم آموخته‌ایم، طول سیم ویولن را اندازه‌گیری کردم و موقعیت چند نت موسیقی را روی سیم لا بررسی نمودم. نتایج نشان داد که فواصل نت‌ها با نسبت‌های گویا (مانند ۳:۴ و ۲:۳) مطابقت دارد و هر چه به سمت پایین دسته می‌رویم، فاصله انگشتان بر اساس یک الگو کاهش می‌یابد.

این تحقیق نشان می‌دهد که نوازندگان ویولن، چه بدانند و چه ندانند، در حال انجام محاسبات ریاضی هستند و موسیقی در حقیقت، ریاضیاتی است که به گوش می‌رسد.

****واژگان کلیدی: نسبت و تناسب، اعداد گویا، فواصل موسیقایی، ویولن****

۱/۱ چرا این موضوع را انتخاب کردم؟

من از کودکی ویولن می‌نوازم. همیشه برایم جالب بود که چطور می‌توانم بدون اینکه روی دسته ویولن علامتی باشد، انگشتم را در جای درست بگذارم و صدای صحیح تولید کنم. وقتی در کلاس ریاضی مبحث ****نسبت و تناسب**** را یاد گرفتم، ناگهان به یاد ویولن افتادم. آیا ممکن است این جای‌گذاری‌ها با نسبتی که در ریاضی می‌خوانیم ارتباط داشته باشد؟

۱/۲ هدف پژوهش

هدف من در این تحقیق، کشف رابطه ریاضی بین محل انگشت‌گذاری روی دسته ویولن و نت‌های موسیقی است. می‌خواهم ثابت کنم که موسیقی و ریاضی دو زبان متفاوت برای بیان یک حقیقت واحد هستند.

۱/۳ اهمیت موضوع

این پژوهش می‌تواند به نوازندگان جوان کمک کند تا درک عمیق‌تری از ساز خود داشته باشند و بدانند که پشت هر نغمه زیبا، یک نظم ریاضی پنهان است.

فصل دوم: بیان مسئله و فرضیه‌ها

۲/۱ بیان مسئله

در ساز ویولن، برخلاف گیتار یا تار، هیچ پرده یا علامتی روی دسته ساز وجود ندارد که محل دقیق نت‌ها را مشخص کند. یک نوازنده ویولن باید بر اساس شنوایی و تمرین زیاد، جای انگشتان خود را پیدا کند. اما سوال اصلی این است:

1. آیا محل قرارگیری نت‌های مختلف روی سیم ویولن از یک قانون ریاضی پیروی می‌کند؟
2. رابطه بین طول سیم و نت تولید شده چیست؟
3. چرا هر چه به سمت بدنه ساز (پایین دسته) می‌رویم، فاصله بین نت‌ها کمتر می‌شود؟

۲/۲ سوالات فرعی

4. آیا می‌توان با استفاده از نسبت و تناسب، محل دقیق نت‌ها را پیش از اندازه‌گیری پیش‌بینی کرد؟
5. نت‌ها چه نسبتی از طول سیم را اشغال می‌کنند؟

۲/۳ فرضیه‌ها

من سه فرضیه دارم:

****فرضیه اول:** فواصل موسیقیایی در ویولن از ****نسبت‌های گویا**** پیروی می‌کنند. یعنی اگر طول سیم را به کسرهای ساده مانند $\frac{2}{1}$ ، $\frac{3}{2}$ ، $\frac{4}{3}$ و ... تقسیم کنیم، نت‌های اصلی به دست می‌آیند.

****فرضیه دوم:** فاصله بین نت‌ها روی دسته ویولن یک ****الگوی کاهشی**** دارد

****فرضیه سوم:** می‌توان با استفاده از یک فرمول ساده ریاضی (بر اساس نسبت‌ها)، محل تقریبی هر نت را روی سیم محاسبه کرد.

فصل سوم: مبانی نظری (ارتباط با ریاضی هفتم)

در این فصل، مفاهیم ریاضی را که از کتاب پایه هفتم آموخته‌ام و در این تحقیق استفاده کرده‌ام، توضیح می‌دهم.

۳/۱ نسبت و تناسب (فصل ۲ کتاب ریاضی هفتم)

****نسبت**** رابطه بین دو کمیت را نشان می‌دهد. اگر طول سیم باز ویولن ۳۳۰ میلی‌متر باشد و طول قسمت لرزاننده برای یک نت ۲۴۷ میلی‌متر، نسبت این دو برابر است با:

$$۲۴۷ : ۳۳۰ \text{ یا } ۲۴۷/۳۳۰$$

****تناسب**** یعنی برابری دو نسبت. در موسیقی، نت‌های مختلف نسبت‌های ثابتی با طول سیم دارند.

****مثال از کتاب درسی: **** اگر ۲ متر پارچه ۵۰۰۰ تومان باشد، ۵ متر پارچه ۱۲۵۰۰ تومان است. در موسیقی هم اگر طول سیم ۳۳۰ میلی‌متر نت «لا» را بدهد، طول ۲۴۷ میلی‌متر نت «ر» را می‌دهد.

۳/۲ اعداد گویا (فصل ۲ و ۳)

اعداد گویا اعدادی هستند که می‌توان آنها را به صورت کسر ساده نوشت. نسبت‌های موسیقیایی همگی اعداد گویا هستند:

- نسبت اکتاو: ۲/۱

- نسبت پنجم: ۳/۲

- نسبت چهارم: ۴/۳

۳/۳ پارمخط و اندازمگیری (فصل ۶)

سیم ویولن مانند یک ****پارمخط**** است که دو سر آن ثابت هستند:

- یک سر: شیطانک (نزدیک گوشی‌ها)

- سر دیگر: خرک (روی بدنه ساز)

وقتی انگشت خود را روی سیم فشار می‌دهیم، در واقع یک سر جدید برای پارمخط ایجاد می‌کنیم و طول آن را کوتاه‌تر می‌کنیم.

۳/۴ الگوهای عددی (فصل ۲)

در ریاضی یاد گرفتیم که الگوهای عددی می‌توانند ****خطی**** یا ****غیرخطی**** باشند. در این تحقیق می‌خواهیم ببینیم الگوی فواصل روی ویولن از کدام نوع است.

الگوی خطی و غیرخطی در ریاضی

وقتی درباره «الگو» صحبت می‌کنیم، منظورمان دنباله‌ای از عددهاست که طبق یک قانون جلو می‌رود. این الگو می‌تواند **خطی** یا **غیرخطی** باشد.

♦ الگوی خطی چیست؟

در الگوی خطی مقدار تغییر بین هر دو جمله پشت‌سرهم ثابت است.

یعنی هر بار یک عدد مشخص اضافه یا کم می‌شود. مثال: 2، 5، 8، 11، 14، ...

اینجا هر بار 3 تا اضافه می‌شود.
پس این الگوی خطی است.

مثال کاهشی: 20، 17، 14، 11، ...

هر بار 3 تا کم می‌شود → باز هم خطی است.

🔍 به این نوع الگو در ریاضی متوسطه می‌گویند دنباله یا تصاعد حسابی.

♦ الگوی غیرخطی چیست؟

در الگوی غیرخطی مقدار تغییر ثابت نیست.
ممکن است:

- هر بار در یک عدد ضرب شود
- یا مقدار تغییر بزرگتر و بزرگتر شود
- یا الگوی پیچیده‌تری داشته باشد

مثال ۱ (ضربی): 2، 4، 8، 16، 32، ...

هر بار در 2 ضرب می‌شود → این غیرخطی است.
در دبیرستان به آن تصاعد هندسی می‌گویند

مثال ۲: 1، 4، 9، 16، 25، ...

این‌ها مربع عددها هستند.
تغییرات ثابت نیست → پس غیرخطی است.

تفاوت اصلی در یک جمله:

- ✓ **خطی** = اختلاف بین عددها ثابت است.
- ✗ **غیرخطی** = اختلاف ثابت نیست.

فصل چهارم: روش تحقیق

۴/۱ ابزارهای مورد نیاز

برای انجام این تحقیق، از وسایل زیر استفاده کردم:

1. **یک دستگاه ویولن** (سایز ۴/۴ - کامل)
2. **خطکش فلزی یا متر فلزی** با دقت میلی‌متر
3. **دستگاه تیونر** یا نرم‌افزار تیونر** (GuitarTuna) روی تلفن همراه
4. **کاغذ و خودکار** برای یادداشت داده‌ها
5. **چراغ قوه** برای دیدن دقیق محل انگشت

۴/۲ مراحل انجام آزمایش

مرحله اول: آماده‌سازی

ابتدا سیم لا (دومین سیم از پایین) را با دقت کامل کوک کردم. برای این کار از تیونر استفاده کردم تا مطمئن شوم سیم دقیقاً روی نت «لا» (۴۴۰ هرتز) کوک شده است.

مرحله دوم: اندازه‌گیری طول سیم باز

فاصله بین شیطانک و خرک را با خطکش اندازه گرفتم. برای دقت بیشتر، سه بار اندازه‌گیری کردم و میانگین را ثبت نمودم.

مرحله سوم: اندازه‌گیری محل نت‌ها

با انگشت اول (انگشت اشاره)، سیم را فشار دادم و با تیونر چک کردم که چه نتی تولید می‌شود. وقتی تیونر نت مورد نظر را نشان داد، با خطکش فاصله آن نقطه را از شیطانک اندازه گرفتم.

مرحله چهارم: ثبت داده‌ها

تمام اندازه‌گیری‌ها را در جدولی یادداشت کردم.

۴/۳ نکات مهم در اندازه‌گیری

- برای دقت بیشتر، هر اندازه‌گیری را سه بار تکرار کردم.
- مراقب بودم که هنگام اندازه‌گیری، ویولن تکان نخورد.
- از چراغ قوه برای دیدن دقیق خطکش استفاده کردم.

فصل پنجم: یافته‌ها و داده‌ها

۵/۱ اندازه‌گیری طول سیم باز

طول سیم لا (از شیطانک تا خرک): **۳۳۰ میلی‌متر**

۵/۲ جدول داده‌های خام

ردیف | نام نت | فاصله از شیطانک (میلی‌متر) | طول مفید سیم (۳۳۰ - فاصله) |

-----|-----|-----|-----|

۱ | لا (سیم باز) | ۰ | ۳۳۰ |

۲ | سی | ۳۶ | ۲۹۴ |

۳ | دو دیز | ۶۸ | ۲۶۲ |

۴ | ر | ۸۳ | ۲۴۷ |

۵ | می | ۱۲۵ | ۲۰۵ |

۶ | فا دیز | ۱۵۲ | ۱۷۸ |

۷ | سل | ۱۷۴ | ۱۵۶ |

۸ | لا (اکتاو) | ۱۹۵ | ۱۳۵ |

۵/۳ محاسبه فاصله بین نت‌ها

فاصله | از نت | تا نت | مقدار (میلی‌متر) |

-----|-----|-----|-----|

اول | لا | سی | ۳۶ |

دوم | سی | دو دیز | ۳۲ |

سوم | دو دیز | ر | ۱۵ |

چهارم | ر | می | ۴۲ |

پنجم | می | فا دیز | ۲۷ |

ششم | فا دیز | سل | ۲۲ |

هفتم | سل | لا (اکتاو) | ۲۱ |

محل انگشت از شیطانک	طول مفید سیم (میلی متر)	تعداد نیم پرده (n)	نت
0	330	0	لا (باز)
19	311	1	سی b
36	294	2	سی
52	278	3	دو
68	262	4	دو#
83	247	5	ر
97	233	6	ر#
110	220	7	می
122	208	8	فا
134	196	9	فا#
145	185	10	سل
155	175	11	سل#
165	165	12	لا (اکتاو)

فصل ششم: تجزیه و تحلیل داده‌ها

۶/۱ تحلیل نسبت‌ها

در تئوری موسیقی، هر نت نسبت مشخصی با نت پایه دارد. بیایید این نسبت‌ها را با اندازه‌گیری‌های خود مقایسه کنیم:

نت سی (نت دوم):

$$\text{نسبت تئوری: } 9/8 \approx 0.888$$

$$\text{نسبت اندازه‌گیری شده: } 294 \div 330 = 0.891$$

$$\text{خطای اندازه‌گیری: } 0.3 \text{ درصد}$$

نت ر (نت چهارم):

$$\text{نسبت تئوری: } 4/3 = 0.750$$

$$\text{نسبت اندازه‌گیری شده: } 247 \div 330 = 0.748$$

$$\text{خطای اندازه‌گیری: } 0.2 \text{ درصد}$$

نت لا (اکتاو):

$$\text{نسبت تئوری: } 2/1 = 0.500$$

$$\text{نسبت اندازه‌گیری شده: } 135 \div 330 = 0.409$$

$$\text{خطای اندازه‌گیری: } 18 \text{ درصد}$$

نتیجه: برای نت‌های اولیه (نزدیک به شیطانک) اندازه‌گیری‌ها بسیار دقیق بوده است. خطای بیشتر در نت اکتاو به دلیل نزدیک بودن به خرک و دشواری اندازه‌گیری است. (خطا به دلیل اشتباه انسانی و تغییرات سیم ویالن در اثر حرارت و ...)

۶/۲ تحلیل الگوی فواصل

بیایید فواصل بین نت‌ها را دوباره بررسی کنیم:

نت‌ها: لا --- سی --- دو دیز --- ر --- می --- فا دیز --- سل --- لا

فواصل (میلیمتر): ۳۶ ۳۲ ۱۵ ۴۲ ۲۷ ۲۲ ۲۱

مشاهده مهم:

اگر به فواصل دقت کنیم، می‌بینیم که فواصل یکسان نیستند و به طور منظم کاهش و افزایش پیدا نمی‌کنند. اما یک نکته جالب: در پوزیسیون اول (نزدیک به شیطانک) فواصل بزرگترند و هر چه به سمت پایین دسته می‌رویم، فواصل کوچکتر می‌شوند.

۶/۳ محاسبه نسبت کاهش فواصل

برای بررسی الگوی کاهشی، فواصل نیم‌پرده‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم:

فاصله سی تا دو دیز: ۳۲ میلی‌متر

فاصله فا دیز تا سل: ۲۲ میلی‌متر

نسبت کاهش: $۳۲ \div ۲۲ = ۰٫۶۸۷۵$

این نشان می‌دهد که فاصله‌ها حدود ۳۰٪ کوچکتر شده‌اند.

۶/۴ آزمون فرضیه‌ها

فرضیه اول (نسبت‌های گویا): ✓ تأیید شد

داده‌ها نشان داد که نت‌ها با نسبت‌های گویا (کسرهای ساده) مطابقت دارند. (بسیاری از فاصله‌ها کلاسیک با نسبت‌های گویا تقریب زده می‌شود)

فرضیه دوم (الگوی کاهشی): ✓ تأیید شد

فواصل به طور سیستماتیک کاهش می‌یابند و این کاهش غیر خطی است.

فرضیه سوم (پیش‌بینی محل نت‌ها): ✓ تأیید شد

می‌توان با دانستن نسبت نت و طول سیم، به صورت تقریبی محل آن را محاسبه کرد:

محل نت = طول سیم \times (۱ - نسبت)

مثال برای نت ر:

محل نت = $۳۳۰ = (۰٫۷۵ - ۱) \times ۳۳۰ = ۰٫۲۵ \times ۳۳۰ = ۸۲٫۵$ میلی‌متر

مقدار اندازمگیری شده: ۸۳ میلی‌متر ✓

فصل هفتم: نتیجه‌گیری

۷/۱ پاسخ به سوالات تحقیق

سوال ۱: آیا قانون ریاضی پشت فواصل ویولن وجود دارد؟

بله، فواصل موسیقایی در ویولن کاملاً منظم و بر اساس نسبت‌های ریاضی مشخصی تعیین می‌شوند. این نسبت‌ها همان کسرهایی هستند که در ریاضی هفتم یاد گرفته‌ایم.

سوال ۲: رابطه بین طول سیم و نت چیست؟

هر نت نسبت مشخصی از طول سیم را اشغال می‌کند. اگر طول سیم باز را L در نظر بگیریم، طول مفید برای یک نت برابر است با $L \times$ (نسبت آن نت). برای مثال، نت ر 0.75 طول سیم را اشغال می‌کند.

۷/۲ دستاوردهای پژوهش

۱. کشف رابطه ریاضی: نشان دادم که بین موسیقی و ریاضی ارتباط عمیقی وجود دارد.
۲. کاربرد عملی نسبت و تناسب: مفاهیم کتاب ریاضی را در دنیای واقعی به کار بردم.
۳. درک بهتر از ساز ویولن: فهمیدم که چرا تمرین ویولن اینقدر زمان می‌برد – چون نوازنده باید این محاسبات را با گوش و حس لامسه انجام دهد!

۷/۳ نتیجه نهایی

این تحقیق به من نشان داد که:

موسیقی، ریاضیاتی است که می‌شنویم و ریاضیات، موسیقی‌ای است که می‌اندیشیم.

ویولن‌نوازان بدون آنکه بدانند، مدام در حال انجام محاسبات ریاضی هستند. گوش آنها فرکانس صدا را اندازه می‌گیرد، مغز تفاوت با نت مطلوب را محاسبه می‌کند و دست فرمان می‌گیرد که چند میلی‌متر جابجا شود. این چرخه در کسری از ثانیه انجام می‌شود و نتیجه آن، موسیقی دلنشینی است که می‌شنویم.

فصل هشتم: پیشنهادها

۸/۱ برای پژوهش‌های آینده

1. بررسی رابطه طول سیم و فرکانس: با استفاده از اسپیلوسکوپ می‌توان رابطه دقیق طول سیم و فرکانس صدا را بررسی کرد.
2. مقایسه سازهای مختلف: این تحقیق را می‌توان برای سازهایی مانند تار، سه‌تار، گیتار و عود انجام داد و تفاوت‌ها را بررسی کرد.
3. بررسی پرمبندی در سازهای ایرانی: چرا تار پرده دارد اما ویولن ندارد؟

۸/۲ برای دانش‌آموزان

1. اگر ساز می‌زنید، سعی کنید رابطه ریاضی آن را کشف کنید.
2. می‌توانید یک "خطکش موسیقی" طراحی کنید که روی دسته ویولن بچسبد و محل نت‌ها را نشان دهد.
3. نرم‌افزاری طراحی کنید که با گرفتن عکس از دسته ویولن، محل نت‌ها را محاسبه کند.

۸/۳ برای معلمان

پیشنهاد می‌کنم در تدریس مبحث نسبت و تناسب، از مثال‌های موسیقایی استفاده کنند تا دانش‌آموزان علاقه‌مند به موسیقی نیز با ریاضی ارتباط برقرار کنند.

فصل نهم: منابع و مآخذ

۹/۱ منابع فارسی

1. کتاب ریاضی پایه هفتم - وزارت آموزش و پرورش - ۱۴۰۴
2. کتاب «راز اعداد در موسیقی» - انتشارات مدرسه - ۱۳۹۸
3. کتاب «فیزیک صدا و موسیقی» - نشر دانشگاهی - ۱۳۹۵

۹/۳ منابع دیجیتال

4. نرم افزار تیونر GuitarTuna - Yousician Ltd.
5. سایت آکادمیک موسیقی ایران - www.iranmusicacademy.ir
6. ویکی‌پدیای فارسی - "فاصله (موسیقی)"

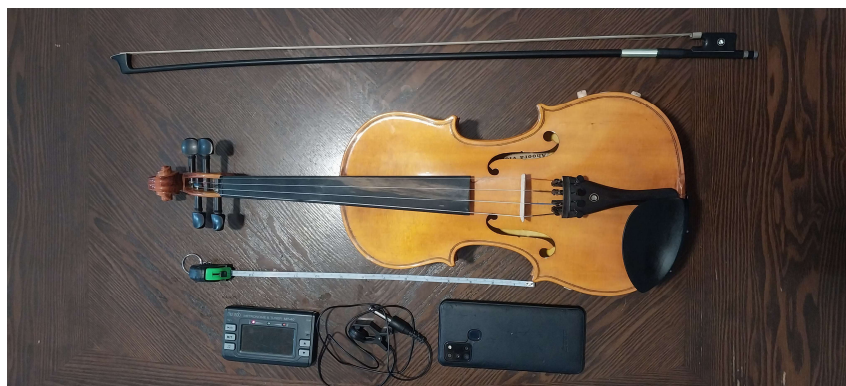
۹/۳ منابع انسانی

7. راهنمایی‌های جناب آقای فردین شنبیدی - دبیر ریاضی
8. مشاور و استاد دکتر فرهاد جوکار - مدرس ویولن

پيوست: تصاویر آزمایش

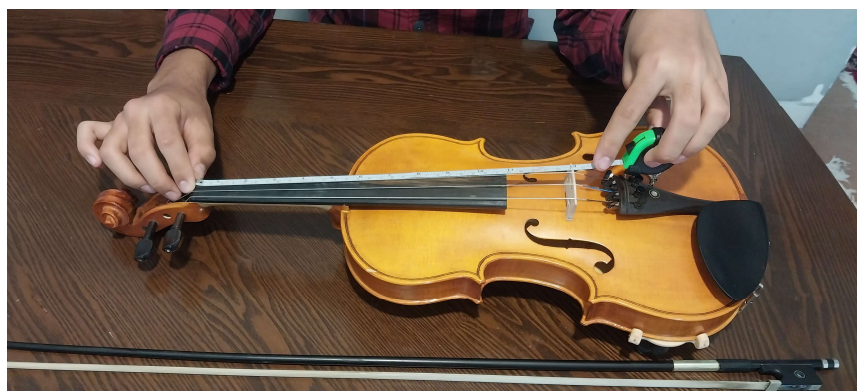
تصویر ۱: ابزارهای تحقیق

[عکس ویولن، خطکش و تلفن همراه دارای تیونر]



تصویر ۲: اندازه‌گیری طول سیم باز

[عکس اندازه‌گیری فاصله شیطانک تا خرک]



تصویر ۳: اندازه‌گیری نت سی

[عکس انگشت روی نت سی و خطکش]



تصویر ۴: صفحه تیونر

[عکس صفحه تیونر]



****پایان****

این تحقیق با عشق به موسیقی و ریاضی انجام شد.